

Problème 221 – Le taux de natalité de Gilead

Niveau : Terminale

Chapitres : Équations différentielles, fonction logarithme

Inédit, publié le 02/07/2021



En 1985, Margaret Atwood publiait « La Servante Écarlate », ce roman de science-fiction dystopique dont la terrible histoire a été adaptée à l'écran de nombreuses fois, notamment plus récemment par une série télévisée éponyme. Dans ce roman, les États-Unis d'Amérique ont été transformés en un État totalitaire, la république de Gilead, qui a réduit les femmes en esclavage au motif qu'elles doivent être mises à contribution dans la relance de la natalité (NB : âmes sensibles – s'abstenir !). En effet, dans ce monde imaginaire, suite à des raisons mystérieuses, le taux de natalité du pays chute drastiquement. Nous allons dans ce problème, proposer une modélisation historique de ce taux de natalité.

On prend pour point de départ l'année 1960, où dans ce monde imaginaire, les États-Unis d'alors, avant de devenir Gilead, ont un taux de natalité de 22 naissances pour 1000 habitants (c'est d'ailleurs approximativement celui des États-Unis dans la réalité)⁽¹⁾. On utilise une fonction $f(t)$ qui au nombre d'années depuis 1960 associe le taux de natalité pour 1000 habitants de Gilead. On a donc $f(0) = 22$.

On admet que cette fonction $f(t)$ est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 0,05y = 0$$

1) Démontrer que $f(t) = 22e^{-0,05t}$.

2) a) Déterminer la limite de $f(t)$ en $+\infty$. En déduire une interprétation géométrique pour la courbe représentative de $f(t)$.

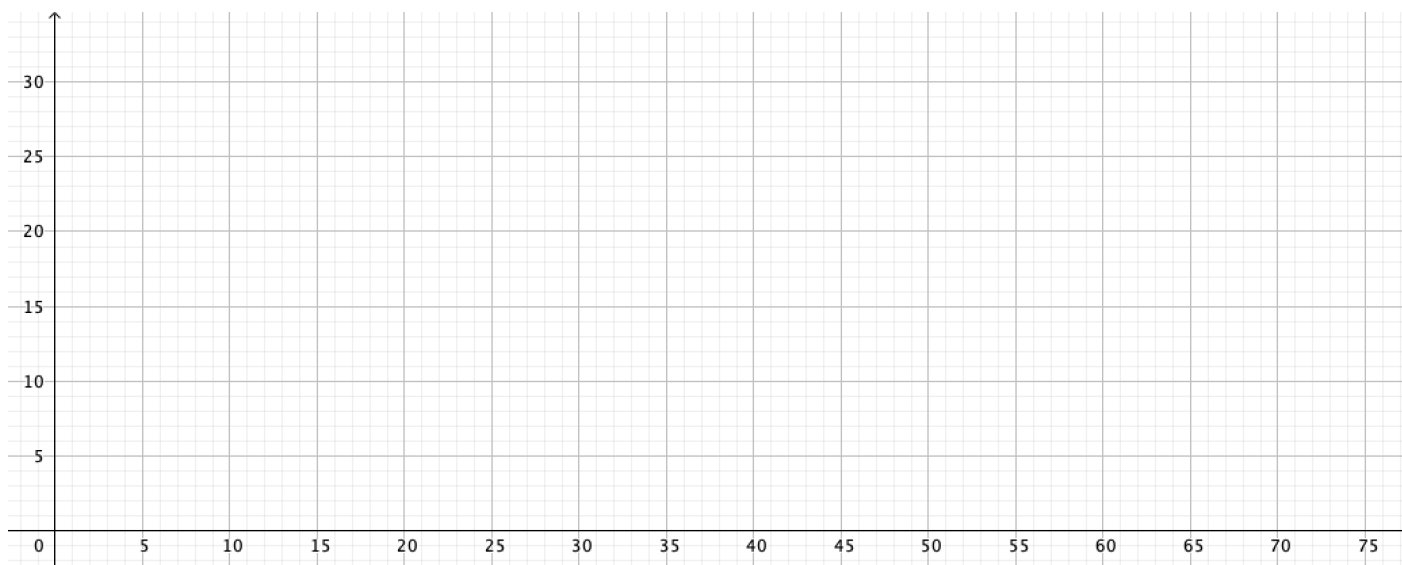
b) Étudier les variations de $f(t)$ sur $[0; +\infty[$, et tracer la courbe représentative de $f(t)$ sur le graphique en **Annexe 1**.

Dans les questions suivantes, une réponse graphique ne sera pas considérée comme suffisante.

3) En 2010, le taux de natalité **réel** des États-Unis d'Amérique était de 13,3 naissances pour 1000 habitants. Comparer cette valeur au taux de natalité de Gilead cette année-là pour confirmer la chute très importante de la natalité.

4) Selon cette étude, durant quelle année le taux de natalité de Gilead passe-t-il en dessous de 1 bébé pour 1000 habitants ? On considèrera qu'à $t=0$, on est au **début** de l'année 1960.

Annexe 1



(1) Sources : <https://bbs.boingboing.net/t/revisiting-the-birth-rate-in-the-handmaids-tale/149361>
<https://www.macrotrends.net/countries/USA/united-states/birth-rate>